Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 13 октября 2010.

Первый тур. Лига стратегий

1. Квадрат 23×23 разбит на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 может быть при этом использовано?

2. Стороны AB и EF вписанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке X, стороны EF и CD — в точке Y, а стороны CD и AB — в точке Z. На прямой EF выбрана точка M так, что $MB \perp AE$. На прямой CD выбрана точка N так, что $NF \perp CE$, а на прямой AB выбрана точка K так, что $KD \perp AC$. Точки O_x, O_y и O_z центры описанных окружностей треугольников MBE, FNC и AKD соответственно. Докажите, что прямые XO_x, YO_y и ZO_z пересекаются в одной точке.

3. Обозначим через $F(n)$ количество таких непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что НОД всех элементов такого подмножества взаимно прост с числом n. Докажите, что $\sum\limits_{d|n} F(d) = 2^n - 1$.

4. В пространстве даны n векторов u_1, u_2, $\ldots u_n$, сумма которых равна 0, а длины больше 1. Дан произвольный вектор v. Докажите, что $|u_1-v|+|u_2-v|+\ldots+|u_n-v| \geqslant n$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делится диагональю BD пополам, а угол B равен $60°$. Докажите, что $AD + DC \geqslant BD$.

6. Докажите, что для любых натуральных a, b и m уравнение $a^{x+b} \equiv x \pmod m$ имеет решение в натуральных числах.

7. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) такие, что $a^{b^c} = (b^a)^c$.

8. Дан двудольный граф G и натуральное число k. Докажите, что ребра G можно окрасить в k цветов таким образом, чтобы для любых двух цветов и любой вершины количество ребер этих двух цветов, выходящих из этой вершины, отличались не более, чем на 1.

9. Даны числа a, b, $c \in [-1, 1]$. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 1 + 2abc$. Докажите, что для всякого натурального n имеет место неравенство $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \leqslant 1 + 2(abc)^n$.

10. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных чисел x и y выполняется равенство

$$f(y + f(x + f(y))) = x + 2y + 3.$$